

Problem Set 4: 证明方法概述

(提交截止时间: 3 月 11 日 10:00)

注: 本试题册所列问题之目的为运用和体验各类证明方法, 并非为证明问题本身; 可在证明时指明证明方式。

Problem 1

证明所有正整数 $n = 4m + 3$ (m 为自然数) 都不能写成两个整数的平方和。

Problem 2

证明方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多组正整数解 $\langle x, y, z \rangle$ 。

Problem 3

两个实数 x 和 y 的平方均值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ 。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值, 构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

Problem 4

用反证法证明: 不存在有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$ 。

Problem 5

在黑板上写下数字 $1, 2, 3 \dots 2n$, 其中 n 是奇数。从中任意挑出两个数 j 和 k , 在黑板上写下 $|j - k|$ 并擦掉 j 和 k 。继续这个过程, 直到黑板上只剩下一个整数为止。证明: 这个整数必为奇数。

Problem 6

有一个 $n \times n$ 的方格表, 先允许从中任意选择 $n - 1$ 个方格涂为黑色, 然后再逐步地将那些至少与两个已涂黑的方格相邻的方格也涂为黑色。试证明: 不论怎样选择最初的 $n - 1$ 个格, 都不能按这样的法则涂黑所有的方格。

Problem 7

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数.

Problem 8

证明或反驳（若成立给出证明，若不成立给出反例）：

- (a) 如果 a 和 b 是有理数，那么 a^b 一定也是有理数.
- (b) 存在 a 和 b 是无理数，使得 a^b 是有理数.